

総合演習 32

(2)

別解

p_k のうち最小となるものが存在するから、これを p_1 としても一般性は失われない。

すると、 $p_1 \leq p_i$ ($i=2, 3, 4, 5, 6$) より、 $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 \geq 6p_1^2$

$$\therefore (p_2^2 - p_1^2) + (p_3^2 - p_1^2) + (p_4^2 - p_1^2) + (p_5^2 - p_1^2) + (p_6^2 - p_1^2) \geq 0$$

等号成立は $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6$ のときで、

このとき $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ より、

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$$

ゆえに、

P の最小値は

$$\begin{aligned} P &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 \\ &= 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

すなわち $P \geq \frac{1}{6}$